XVI Seminário Internacional de Educação no Mercosul
XIII Seminário Interinstitucional
IV Curso de Práticas Socioculturais Interdisciplinares
III Encontro Estadual de Formação de Professores
I Mostra de Trabalhos Científicos do PIBID
UNICRUZ

A GEOMETRIA DOS FRACTAIS NO ENSINO: UMA NOVA FORMA DE VISUALIZAR O MUNDO

GOI, Senhorinha da Silva[1]

DAHLKE, Marsoé Cristina[2]

Resumo: Neste trabalho são descritas a construção didática e as intervenções em sala de aula para introduzir o conceito de fractal no Ensino Fundamental e Médio. Buscou-se a complexidade do conhecimento do cotidiano dos alunos através de uma abordagem multidisciplinar, em atividades curtas e seguindo os ciclos e/ou etapas da aprendizagem. As diversas tendências do ensino de ciências têm em comum o interesse de que os alunos adquiram uma cultura científica efetiva, além de uma crescente preocupação em relacionar os saberes explorados na sala de aula com o cotidiano dos alunos. Ao abordar um tópico como fractal no ensino fundamental e médio colabora-se com a adequação dos conteúdos de Ciências, Matemática, Física, Química, Inglês, Geografia, Arte e demais disciplinas consideradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Para entender o conceito de fractal que está presente no dia a dia dos alunos, é necessário que eles se deem conta disso para identificarem-no por toda parte, de modo a incorporarem esse conhecimento como ponto fundamental na cultura científica que terão pela vida inteira. Há vários elementos da vida cotidiana que são descritos por sistemas não-lineares fractais, tais como o ritmo dos batimentos cardíacos, abalos sísmicos e patologias cardíacas. Além isso, os modelos fractais estão na economia e na informática e na natureza. Essa Geometria dos Fractais está intimamente ligada a uma ciência chamada CAOS, a qual trouxe consigo ver ordem e padrões, quando anteriormente só via irregularidades, tais como desordem na atmosfera, forma das nuvens, aglomerados estelares, variação populacional de espécies, turbulência de fluídos, cotações da bolsa, foram estudando e buscando ordem em diferentes tipos de irregularidades e surpreendendo com ordem no caos que foram descobertos. Como destaca Benoîte Mandelbrot (1992), “Nuvens não são esferas, montanhas não são círculos, um latido

---

[1] Prof.ª Especialista em interdisciplinaridade, IMEAB e Escola Estadual de Ensino Fundamental 24 de Fevereiro, ssiqueira.goi@hotmail.com.
[2] Prof.ª Mestre em Modelagem Matemática, Escola Municipal Fundamental Soares de Barros e Colégio Tiradentes da Brigada Militar, marsoe@bol.com.br.

não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta“. Ensinar Geometria Fractal é criar meios para estabelecer conexões com várias ciências e situações do cotidiano, oportunizando a difusão ao acesso aos computadores e à tecnologia da informática. A existência do belo nos fractais e possibilidades do despertar e desenvolver o senso estético com o estudo da arte aplicada à construção de fractais, estendendo-se a ação que envolve simultaneidade emoção, habilidade e criatividade. Possibilitando momentos de investigação e envolvimento na elaboração de conjecturas e aprendizagem significativa.

Palavras-Chave: Geometria. Fractais. Ensino. Multidisciplinar. Ciclos de Aprendizagem.

Abstract: In this work the construction and didactic interventions in the classroom are described to introduce the concept of fractal in Elementary and Secondary Education. We sought the complexity of the knowledge of the daily lives of students through a multidisciplinary approach, in short activities and following cycles and / or stages of learning. The various trends of science education have in common the interest of students to acquire an effective scientific culture, plus a growing concern to relate the knowledge explored in the classroom with the daily lives of students. When approaching a topic as fractal in middle and high school collaborates with the adequacy of the contents of Sciences, Mathematics, Physics, Chemistry, English, Geography, Art and other subjects considered in the National Curriculum Guidelines. To understand the concept of fractal that is present in the daily lives of students, it is necessary that they will realize that to identify him everywhere, to incorporate this knowledge as a key point in the scientific culture that will have for a lifetime. There are several elements of everyday life that are described by fractals nonlinear systems, such as the rhythm of heartbeats, earthquakes and cardiac pathologies. Besides this, the fractal models are in economics and computer science and nature. This geometry of fractals is closely linked to a science called CHAOS, which brought order and see patterns where previously only saw irregularities such as disorder in the atmosphere, forms clouds, star clusters, population variation of species, fluid turbulence, stock quotes, were studying and seeking order in different types of irregularities and with surprising order in the chaos that were discovered. As highlighted Benoîte Mandelbrot (1992), "Clouds are not spheres, mountains are not circles, barking is not continuous, nor the ray travels in a straight line." Teaching Fractal Geometry is to devise means to establish connections with various sciences and everyday situations, providing opportunities to spread access to computers and information technology. The existence of fractals and the beautiful possibilities of awakening and developing the aesthetic sense applied to the study of the construction of fractal art, extending the action involving simultaneous excitement, skill and creativity. Providing a moment of research and involvement in the development of conjectures and meaningful learning.

Key words: Geometry. Fractals. Education. Multidisciplinary. Learning cycles.

Introdução

Durante séculos, os objetos e os conceitos da geometria euclidiana foram considerados aqueles que melhor descreviam o mundo em que vivemos. Cientistas conceberam uma visão da natureza a partir de conceitos e formas de figuras regulares e diferenciáveis.

Nos últimos quarenta anos vêm se desenvolvendo um novo ramo da geometria que modela as irregularidades da natureza, a geometria fractal. Figuras que no início do século passado eram vistas como “monstros matemáticos”, já que desafiavam as noções comuns de infinito e para as quais não havia uma explicação objetiva, têm hoje um papel notável na interpretação da realidade.

Através dos estudos realizados no final do século XIX e início do século XX, foi possível fundamentar esta nova ciência que, influiu decisivamente para o rompimento do determinismo, ampliou a abrangência da geometria e possibilitou ao homem trabalhar com as complexidades da natureza.

Difundida pelo matemático polonês Benoit Mandelbrot (1986), a geometria dos fractais tem atraído interesse científico e educacional devido à sua potencialidade, versatilidade e fascínio oferecido por sua beleza e pelo grande poder de análise dos objetos da natureza. Por isso, seu uso tem ocorrido em diversas áreas da ciência, tecnologia e arte.

Este trabalho explora a geometria dos fractais, suas características e propriedades a partir da construção de cartões fractais tridimensionais, destacando aspectos fundamentais da geometria euclidiana.

As atividades com cortes e dobraduras são muito enriquecedoras, no que se referem às inúmeras possibilidades que elas oferecem-nos diversos ramos da matemática. Além de toda a exploração geométrica que é possível fazer, noções de proporcionalidade, frações, funções e álgebra são fortemente evidenciadas nesta prática.

Acreditamos que, por ser um trabalho diferente, uma “quebra” da rotina das aulas de matemática, motiva e envolve os alunos. Outras práticas importantes ocorrem, como o manuseio de instrumentos de medida (régua, compasso), a abstração das leis matemáticas e o uso da criatividade.

Segundo Navaz et al. (2006), apesar deste tipo de abordagem não ser considerado didático por muitos professores, pode se tornar um bom aliado para as descobertas, estudos e a construção do conhecimento interdisciplinar.

Ao dobrarmos o papel, executamos verdadeiros atos geométricos, pois construímos retas, ângulos, polígonos, figuras bidimensionais e tridimensionais (NAVAZ et al., 2006). Podemos ainda rever conceitos de geometria euclidiana plana e espacial durante a construção dos cartões.

Este trabalho apresenta uma proposta de atividade que permite introduzir a geometria dos fractais para o Ensino Fundamental e médio por meio da construção de cartões fractais em três dimensões, explorando as características que definem esse conjunto e a geometria euclidiana envolvida no processo de construção.

O que são os Fractais?

Os fractais são conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo *fractal*, nomeado por Mandelbrot, está no radical *fractus*, proveniente do verbo latino *frangere*, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem de a mesma raiz a palavra fragmentar, em português (MOREIRA, 2003).

As principais propriedades que caracterizam e que permitem definir os conjuntos fractais são:

- *Autossemelhante, que pode ser exata ou estatística*, ou seja, mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala (transformação que reduz ou amplia o objeto ou parte dele);
- *Complexidade infinita*, isto é, qualquer que seja o número de amplificações de um objeto fractal, nunca obterá a “imagem final”, uma vez que ela poderá continuar a ser infinitamente ampliada.
- *Irregularidade*, no sentido de rugosidade (não suavidade) ou fragmentação;
- Possuir em geral, *dimensão não inteira*. A dimensão fractal quantifica, de certo modo, o grau de irregularidade ou fragmentação do conjunto considerado.

A autossimilaridade aproximada ou estatística refere-se principalmente a objetos da natureza que não são fractais exatos, mas podem ser muito bem descrito por eles, como por exemplo, a estrutura da couve-flor. No caso de determinadas plantas, pode-se encontrar certa semelhança entre as pequenas folhas que constituem um pequeno ramo com outros ramos maiores, e que assim sucessivamente irão gerar uma planta, que afinal não é muito diferente do pequeno ramo inicial, como mostra a figura 1.

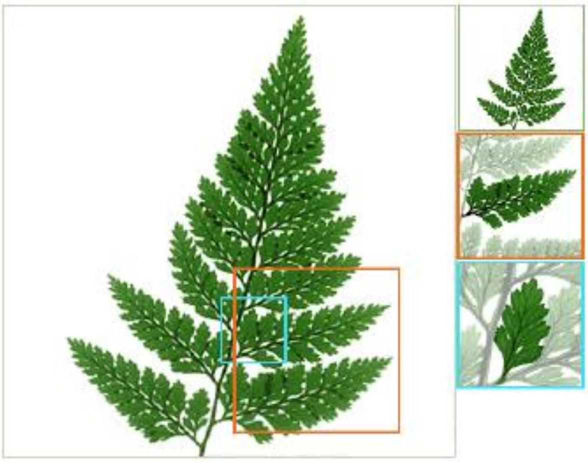

Figura 1: Ramos de uma planta cuja auto semelhança é aproximada.
Fonte: http://www.mat.uc.pt/~mcag/FEA2003/GeometriaFractal.pdf

A autossimilaridade exata é um conceito artificial, pois não é possível encontrar na natureza objetos rigorosamente iguais a si próprios. Formalmente, uma figura possui autossemelhança exata se, para qualquer dos seus pontos, existe uma vizinhança que contém uma parte da figura semelhante a toda figura.

No final do século XIX e início do século XX, os processos recursivos e iterativos para obtenção de conjuntos chamaram a atenção de matemáticos como George Cantor, Waclav Sierpinski, Helge von Koch, Pierre Fatou e Gaston Julia. Mandelbrot (1986) afirma que o estudo desses matemáticos foi fundamental para o desenvolvimento dessa nova geometria e seus conjuntos são conhecidos como fractais clássicos (BARBOSA, 2002).

O conjunto conhecido como Curva de Koch ou Floco de Neve de Koch foi criada pelo matemático sueco Helge von Koch em 1904. A construção dessa curva pode ser descrita pelo processo iterativo ilustrado na figura 2.

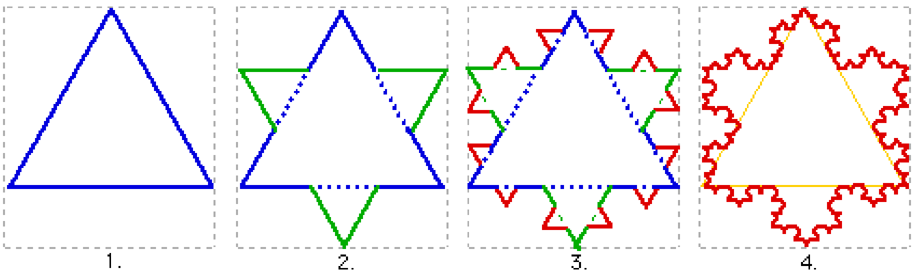

Figura 2: Floco de neve de Koch.
Fonte: http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/Snowflake.html

O conjunto conhecido como Triângulo de Sierpinski foi criado pelo matemático polonês Waclav Sierpinski em 1916 e possui, além de características e propriedades fractais, relação com o triângulo aritmético de Pascal (MARTINELLI, 2005). A figura 3mostra o conjunto obtido pelo processo iterativo.

Figura 3: Triângulo de Sierpinski obtido através de processos iterativos.
Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/semtem/semtem99/sem21/framegeral.htm

O fractal que tem o nome de Conjunto de Mandelbrot, também obtido no plano complexo. Os pontos que pertencem ao conjunto de Mandelbrot correspondem precisamente aos conjuntos de Julia conexos e os pontos fora do conjunto de Mandelbrot correspondem aos conjuntos de Julia desconexos. Este conjunto, talvez seja o mais complexo objeto conhecido pelos matemáticos, como revelam as imagens geradas por computador (Figura 4). À medida que ela é examinada em níveis cada vez mais altos de ampliação, o observador vê-se diante de um desfile interminável de voltas, rendilhados e formas que se assemelham à totalidade do conjunto.

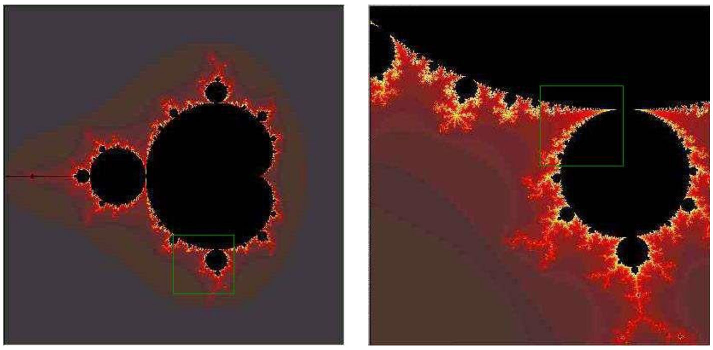

Figura 4: Conjunto de Mandelbrot.
Fonte:
http://www.lactamme.polytechnique.fr/Mosaic/images/TOUR.C.11.0032.D/image.jpg

Note que, todos esses conjuntos possuem as duas características fundamentais que definem um fractal: a auto similaridade e a complexidade infinita. As explorações desses conjuntos podem ser muito enriquecedoras para as aulas de matemática. Por exemplo, através da construção do Conjunto de Cantor podemos explorar, usando uma tabela, o número de segmentos a cada nova iteração, o que nos permite chegar a uma fórmula geral, onde é possível obter com total precisão o número de segmentos que o conjunto terá para uma iteração qualquer. O interessante é que o número de segmentos tende ao infinito, porém o comprimento do segmento tende a zero. No Triângulo de Sierpinski, a área tende a zero. Na Curva de Koch, a área tende a um limite, porém, seu perímetro tende ao infinito.

Uma sugestão de exploração consiste em apresentar a lei de construção dos conjuntos fractais aos alunos e fazer com que eles façam conjecturas e, através da construção do fractal busquem, por meio de gráficos, tabelas ou algoritmos, explicações que permitam corroborar ou refutar suas hipóteses.

Construindo Cartões Fractais Tridimensionais

A atividade de construção de cartões fractais tridimensionais é uma forma motivadora e interessante de apresentar a geometria dos fractais para os estudantes de Ensino Fundamental, pois, devido ao apelo estético e aos conteúdos matemáticos, envolve e captura a atenção dos alunos.

Segundo Simmt e Davis (1998), além das idéias de recursividade, iteração, auto similaridade e dimensão fracionária, é possível abordar tópicos como: sistemas numéricos, séries, sequências, limite, simbologia e introduzir a matemática discreta.

A elaboração deste trabalho foi inspirada no livro *Fractal Cuts* de Diego Uribe (2004), o qual contém as figuras e planificações dos cartões explorados. Para fundamentar nosso trabalho, fizemos uma pesquisa detalhada sobre o tema e descobrimos as leis que definem como devem ser feitos os cortes e as dobraduras a partir das planificações dos cartões.

Neste artigo, descreveremos as atividades de construção dos cartões *Degraus Centrais*, *Triângulo de Sierpinski* e *Trisecções*, pois eles possuem características diferenciadas. Para construção são necessários: folha de ofício, régua, tesoura, lápis, borracha e muita criatividade.

Construindo o cartão *Degraus Centrais*

Os cartões resultam de uma seqüência de cortes (linhas cheias) e dobraduras (linhas pontilhadas). Tomando-se como ponto de partida a planificação do cartão *Degraus Centrais* (Figura 5), as etapas a seguir mostram sua construção.

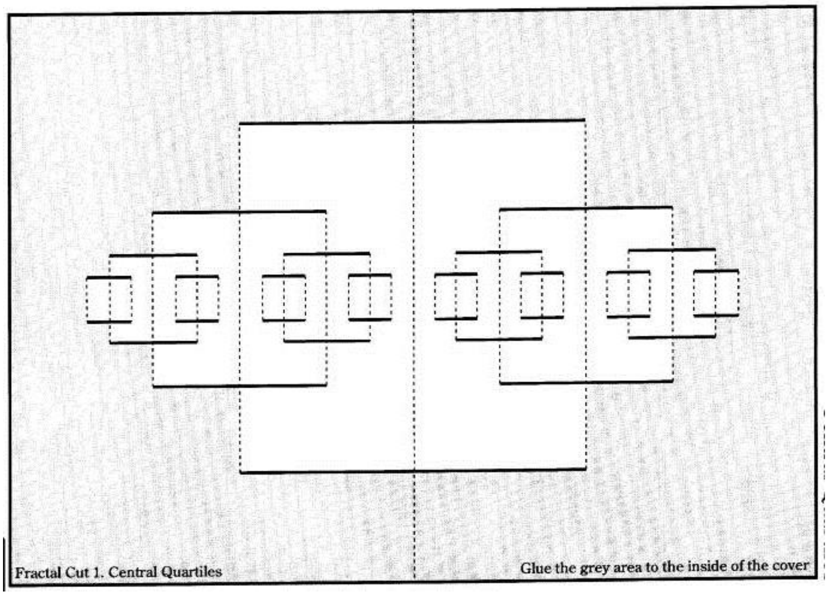

Figura 5: Planificação do cartão *Degraus Centrais*.

1. Pegue uma folha de tamanho A4.
2. Dobre a folha ao meio, ao longo de sua altura, como mostra a figura 7.

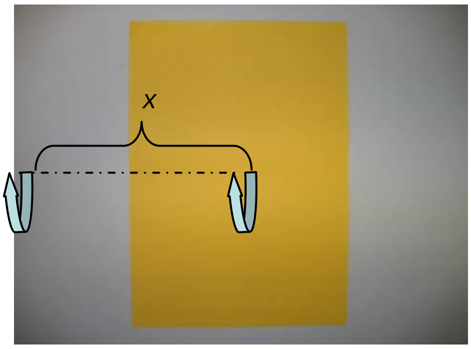

Figura 6: Dobradura inicial (Passo 2).

3. Com a folha dobrada ao meio, faça dois cortes verticais simétricos a uma distância $\frac{x}{4}$ das extremidades da folha, de altura $\frac{a}{2}$, como mostra a figura 9. Note que $a = 2 \times \frac{x}{4} = \frac{x}{2}$.

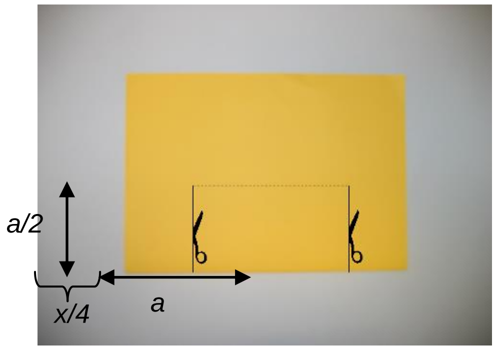

Figura 7: Passo 3.

4. Dobre o retângulo formado para cima, fazendo um vinco na dobra.

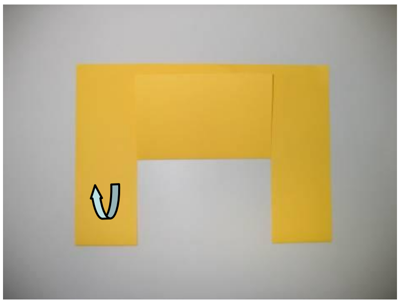

Figura 8: Passo 4.

5. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe o centro da figura em relevo. Podemos dizer que esta é a primeira geração do cartão fractal.

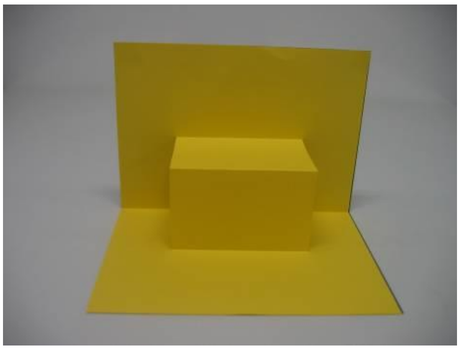

Figura 9: Primeira geração do cartão fractal.

6. Dobre a folha novamente, conforme a figura 9, pois as gerações seguintes serão obtidas seguindo os mesmos passos de 3 a 5, porém em uma escala menor, apenas na região dobrada. A segunda geração do cartão fractal é obtida com o corte mostrado na figura 8.

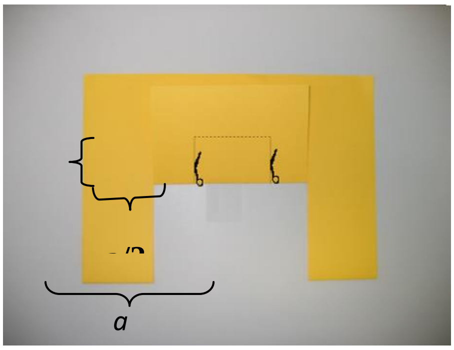

Figura 10: Passo 6.

7. Dobre o retângulo para cima, fazendo um vinco na dobra.

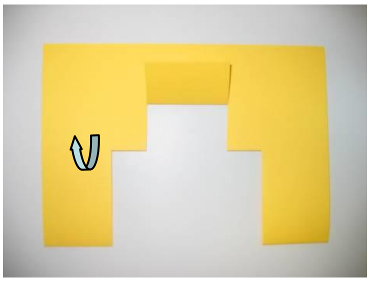

Figura 11: Passo 7.

8. Volte o retângulo dobrado para a posição inicial e puxe a figura em relevo. Neste momento, temos a primeira e a segunda geração do cartão fractal.

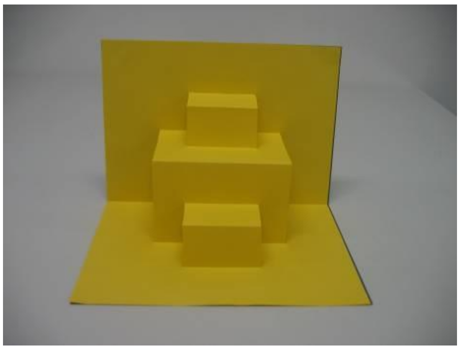

Figura 12: Primeira e segunda geração do cartão fractal.

9. Para obter mais gerações, repita esse processo enquanto for possível realizar os cortes e as dobraduras no papel, sempre usando a regra de corte estabelecida no passo 3. Por fim, desdobre todos os recortes e puxe as figuras em relevo. A figura 15 mostra um cartão de quatro gerações obtido pelo processo descrito.

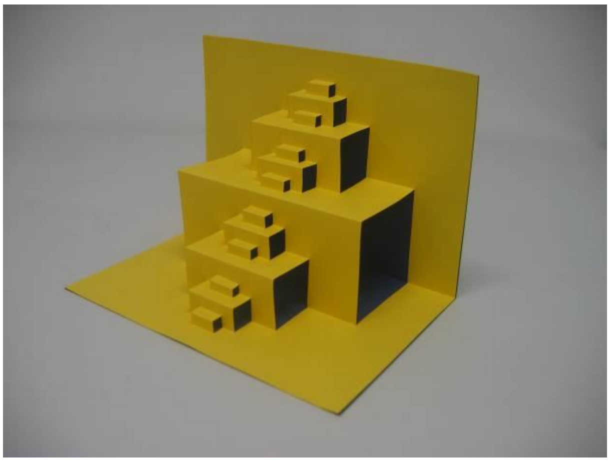

Figura 13: Cartão fractal *Degraus Centrais*.

Podemos observar que o cartão da figura 13 possui estruturas auto similares. Com o cartão pronto, observamos que as formas geométricas resultantes dos cortes e dobraduras são paralelepípedos.

Percebemos durante a construção que, a cada novo corte e dobradura, obtemos novos paralelepípedos. Se chamarmos de iteração zero, a primeira geração do cartão, quantos paralelepípedos novos surgem a cada iteração? Podemos explorar a construção do cartão construindo a tabela 1.

Tabela 1: Iteração X Número de paralelepípedos novos.

Iteração	*Número de paralelepípedos novos*
0	*1*
1	*2*
2	*4*
3	*8*
4	*16*
...	...
N	2^n

Note que a cada iteração, o número de novos paralelepípedos dobra, porém, em escala menor (paralelepípedos menores). Com isso, podemos concluir que o processo de construção dos paralelepípedos em cada iteração é descrito pela lei de potência 2^n, onde n = 0, 1, 2, 3,... É o número das iterações. Identificamos que a cada nova iteração temos um paralelepípedo cercado por 2 novos paralelepípedos. Este valor será denominado fator multiplicador.

Podemos incrementar nossa tabela explorando o volume de cada paralelepípedo gerado em diferentes iterações (Figura 16). Na primeira geração, o volume do paralelepípedo construído será $a \times \frac{a}{2} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}$.

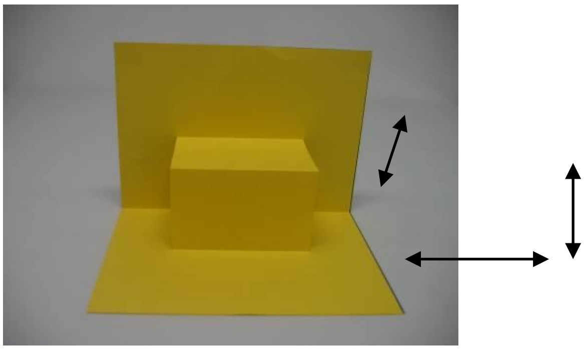

Figura 14: Paralelepípedo obtido na primeira iteração.

A tabela 2 mostra o cálculo dos volumes dos paralelepípedos obtidos nas diferentes iterações, assim como o volume total. Nesse caso, a lei de potência dos volumes produz equações de maior complexidade. Esta atividade de generalização da lei dos volumes pode ser encarada como um grande desafio para os estudantes.

Tabela 2: Volume dos novos paralelepípedos em cada iteração e volume totais para o cartão Degraus Centrais.

Iteração	*Volume do novo paralelepípedo*	*Volume total (Soma dos volumes de todos os paralelepípedos)*
0	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \times a = \frac{a^3}{4} = \frac{a^3}{2^0 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4}$
1	$\left(\frac{a}{4}\right)^2 \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{32} = \frac{a^3}{2^5} = \frac{a^3}{2^3 \times 2^2}$	$\frac{a^3}{4} + 2 \times \frac{a^3}{32} = \frac{4a^3 + a^3}{16} = \frac{5a^3}{16}$
2	$\left(\frac{a}{8}\right)^2 \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{256} = \frac{a^3}{2^8} = \frac{a^3}{2^6 \times 2^2}$	$\frac{5a^3}{16} + 4 \times \frac{a^3}{256} = \frac{20a^3 + a^3}{64} = \frac{21a^3}{64}$
...	...	...

N	$\frac{a^3}{2^{3n+2}}$	$\frac{a^3}{3}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right]$

Com base nos dados da tabela é possível chegar à fórmula geral que informa o volume total dos paralelepípedos do cartão em uma iteração qualquer. Na tabela acima observamos que o volume total do sólido em uma iteração qualquer é a soma dos termos de uma progressão geométrica.

À medida que o número de iterações aumentando, surgem novos paralelepípedos, logo o volume total aumenta. Entretanto, a variação de volume de uma iteração para outra é cada vez menor, pois o volume de cada novo paralelepípedo diminui. Essa idéia poderia ser utilizada para introduzir a noção de limite.

Note também que o cartão possui *autos similaridade*, ou seja, ele mantém a mesma forma e estrutura sob uma transformação de escala e *complexidade infinita*. Se fosse possível continuar infinitamente o processo de corte e dobradura no papel, nunca obteríamos o "cartão final", uma vez que a lei que define o processo de construção poderá continuar a ser aplicada infinitamente.

Discussões e Conclusões

Este trabalho mostrou uma proposta de exploração da geometria dos fractais através da construção de cartões fractais tridimensional. Este tipo de abordagem mostra-se apropriada para exploração de conceitos e propriedades da geometria euclidiana, comumente conhecida por nossos estudantes no Ensino Fundamental e Médio.

Por ser um tema atual e amplo, a exploração da geometria dos fractais permite tornar a aula de matemática um espaço propício para aprendizagem, que une aspectos lúdicos da manipulação do cartão com a abordagem de conceitos matemáticos. É possível ainda investigar, a partir de tópicos da matemática tradicional, conceitos mais elaborados que podem servir como introdução para um conteúdo futuro, como séries e limites.

Esta atividade sugere que, durante o processo de construção dos cartões, podem ser discutidos os seguintes tópicos:

- As características que definem um conjunto fractal, como a auto similaridade e a complexidade infinita;

- A generalização da lei de crescimento envolvida, por meio do número de "paralelepípedos" ao longo das iterações e dos volumes;
- A descrição de uma sequência ou série convergente a partir da lei de crescimento do cartão;
- A noção de limite de uma função.

Outra abordagem possível seria a investigação das leis produzidas por outras regras de construção de cartões e pela exploração de outras grandezas, como os comprimentos dos cortes ou as áreas das faces.

Acreditamos que a abordagem proposta aproxima os conceitos matemáticos da realidade do aprendiz, fazendo-o refletir e criar novas relações com a matemática, a partir do jogo da construção dos cartões fractais. Mesmo conceitos muito distantes da realidade, como as séries e limites, tornam-se concretos durante esta exploração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte**: Editora Autêntica, 2002.

MANDELBROT, Benoit. Comment j'ai découvert lês fractales. **La Recherche**, França, n. 175, pp. 420 - 424, 1986.

MARTINELLI, Rodiane Ouriques; SILVA, Ana Maria Marques da. **O que há dentro do triângulo de Pascal?** In: VI Salão de Iniciação Científica da PUCRS, 2005, Porto Alegre. Anais do Salão de Iniciação Científica. Porto Alegre: PUCRS, 2005. v. 1. p. 26937.

MOREIRA, Ildeu de Castro. Fractais. **Complexidade e Caos. Rio de Janeiro**: Editora UFRJ/ COPEA, 2003, pp 51 – 82.

NAVAZ, Mirian Benedetti; MACHADO, Áurea Isabel; SOUZA, Janete Costa de; LUCENA, Márcia E. R. de. **A geometria das dobraduras: Trabalhando o lúdico e ressignificando saberes**. Disponível em: < http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/cientificos/cc03.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2013.

SIMMT, Elaine and BRENT, Davis. Fractal Cards: A Space for Exploration in and Discrete Mathematics. **The Mathematics Teacher**. Vol. 91, n.2, pp. 102-108, fev. 1998.

URIBE, Diego. **Fractal Cuts: Exploring the magic of fractals with pop-up designs**. England : Tarquin Publications, 2004.